Cognome **Nome** **Matr.**

---

c.l. Fisica **Analisi 2** prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2017 **II prova intermedia** versione A

1A] *(6 p.ti)* Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x$.

$$\text{Risolvere poi il P.C.} \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x \\ y(0) = \frac{5}{2} \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Risp. $\alpha e^x + \beta e^{3x} + x + 1 + \frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Soluzione del P.C.: $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

2A] *(4 p.ti)* Qual è il dominio di convergenza delle serie $\Sigma_1 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+e^n}{1+n^2e^{2n}} x^n$, $\Sigma_2 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+1}{n^2+8}\left(\frac{2}{x}\right)^n$?

Risp. (Σ_1) $[-e, e]$ (Σ_2) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

3A] *(4 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, sia

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + \sqrt{|x|}}.$$

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su qualunque sottoinsieme limitato, ma non lo è sugli intervalli illimitati I (poiché in tal caso $\|f_n\|_{\infty,I} \geq \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = +\infty$).

4A] *(4 p.ti)* Sia $f_\alpha \colon \Omega := (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f_\alpha(x, y) := 4\sqrt{x} + 8\sqrt{y} - \alpha xy$, $\alpha > 0$. Classificare la natura dei punti stazionari di f_α in Ω.

Risp. Vi è sempre un unico punto stazionario: $(4\alpha^{-2/3}, \alpha^{-2/3})$ che è di sella.

5A] *(6 p.ti)* Descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 10e^{2x} - 6$$

Risp. $(\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{-3x} - 2 + 2e^{2x}$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

6A] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -e^{-3y}\cos x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata.

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{3}\log(e^{3\alpha} - 3\sin x)$ per ogni α. Il suo dominio è $\mathbb{R}$ se $e^{3\alpha} > 3$, altrimenti è $(-\arcsin(e^{3\alpha}/3) - \pi, \arcsin(e^{3\alpha}/3))$ quando $e^{3\alpha} \leq 3$, e non è in tal caso prolungabile perché ha asintoti verticali agli estremi.

Cognome	Nome	Matr.

c.l. Fisica	**Analisi 2**	prof. Molteni/Vignati
20 Giugno 2017	**II prova intermedia**	versione B

1B] *(6 p.ti)* Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x$.

$$\text{Risolvere poi il P.C.} \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Risp. $\alpha e^x + \beta e^{3x} + x + 1 + \frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Soluzione del P.C.: $\alpha = 1$, $\beta = -2$.

2B] *(4 p.ti)* Qual è il dominio di convergenza delle serie $\Sigma_1 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+e^n}{3+n^2e^{2n}} x^n$, $\Sigma_2 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+2}{n^2+1}\left(\frac{3}{x}\right)^n$?

Risp. (Σ_1) $[-e, e]$ (Σ_2) $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

3B] *(4 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, sia

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + \sqrt{|x|}}.$$

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su qualunque sottoinsieme limitato, ma non lo è sugli intervalli illimitati I (poiché in tal caso $\|f_n\|_{\infty,I} \geq \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = +\infty$).

4B] *(4 p.ti)* Sia $f_\alpha \colon \Omega := (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f_\alpha(x, y) := 8\sqrt{x} + 4\sqrt{y} - \alpha xy$, $\alpha > 0$. Classificare la natura dei punti stazionari di f_α in Ω.

Risp. Vi è sempre un unico punto stazionario: $(\alpha^{-2/3}, 4\alpha^{-2/3})$ che è di sella.

5B] *(6 p.ti)* Descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 15e^{2x} - 3$$

Risp. $(\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{-3x} - 1 + 3e^{2x}$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

6B] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -e^{-2y} \cos x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata.

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{2}\log(e^{2\alpha} - 2\sin x)$ per ogni α. Il suo dominio è $\mathbb{R}$ se $e^{2\alpha} > 2$, altrimenti è $(-\arcsin(e^{2\alpha}/2) - \pi, \arcsin(e^{2\alpha}/2))$ quando $e^{2\alpha} \leq 2$, e non è in tal caso prolungabile perché ha asintoti verticali agli estremi.

Cognome **Nome** **Matr.**

---

c.l. Fisica **Analisi 2** prof. Molteni/Vignati

20 Giugno 2017 **II prova intermedia** versione C

1C] *(6 p.ti)* Determinare la soluzione generale di $y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x$.

Risolvere poi il P.C. $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x - 1 + 5\cos x \\ y(0) = \frac{3}{2} \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

Risp. $\alpha e^x + \beta e^{3x} + x + 1 + \frac{1}{2}\cos x - \sin x$. Soluzione del P.C.: $\alpha = -2$, $\beta = 2$.

2C] *(4 p.ti)* Qual è il dominio di convergenza delle serie $\Sigma_1 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 + e^n}{5 + n^2 e^{2n}} x^n$, $\Sigma_2 := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + n^4}{n^2 + 3} \left(\frac{4}{x}\right)^n$?

Risp. (Σ_1) $[-e, e]$ (Σ_2) $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

3C] *(4 p.ti)* Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed $x \in \mathbb{R}$, sia

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^3 + \sqrt{|x|}}.$$

(a) Stabilire l'insieme D di convergenza puntuale della successione $\{f_n\}$ e determinarne la funzione limite f.
(b) Discutere la convergenza uniforme di $\{f_n\}$ ad f in D e nei suoi sottointervalli.

Risp. La successione $f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione identicamente nulla. La convergenza è uniforme su qualunque sottoinsieme limitato, ma non lo è sugli intervalli illimitati I (poiché in tal caso $\|f_n\|_{\infty,I} \geq \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = +\infty$).

4C] *(4 p.ti)* Sia $f_\alpha \colon \Omega := (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f_\alpha(x, y) := \sqrt{x} + \sqrt{2y} - \alpha xy$, $\alpha > 0$. Classificare la natura dei punti stazionari di f_α in Ω.

Risp. Vi è sempre un unico punto stazionario: $(\alpha^{-2/3}, \alpha^{-2/3}/2)$ che è di sella.

5C] *(6 p.ti)* Descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 5e^{2x} - 9$$

Risp. $(\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{-3x} - 3 + e^{2x}$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

6C] *(6 p.ti)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -e^{-4y} \cos x \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) Verificare che ammette un'unica soluzione locale $\phi_\alpha(x)$, e determinarla esplicitamente.

(b) Al variare di α, individuare l'intervallo massimale su cui $\phi_\alpha(x)$ è soluzione e fornire un grafico qualitativo della soluzione trovata.

Risp. Eq. a variabili separabili. La soluzione locale è $\phi_\alpha(x) = \frac{1}{4} \log(e^{4\alpha} - 4 \sin x)$ per ogni α. Il suo dominio è $\mathbb{R}$ se $e^{4\alpha} > 4$, altrimenti è $(-\arcsin(e^{4\alpha}/4) - \pi, \arcsin(e^{4\alpha}/4))$ quando $e^{4\alpha} \leq 4$, e non è in tal caso prolungabile perché ha asintoti verticali agli estremi.